ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε πίνακας μετατρέπεται σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα με την εκτέλεση ενός πεπερασμένου πλήθους γραμμοπράξεων.

Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό κάθε πίνακας είναι ισοδύναμος με έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτός ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας είναι και μοναδικός.

Ο παρακάτω αλγόριθμος μας δίνει μια μέθοδο με την οποία μπορούμε να βρίσκουμε κάθε φορά το μοναδικό αυτόν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1ο: Βρίσκουμε την πρώτη στήλη του πίνακα που περιέχει μη μηδενικό στοιχείο.

ΒΗΜΑ 2ο: Μεταφέρουμε στον πίνακα πρώτη τη γραμμή που περιέχει μη μηδενικό στοιχείο της στήλης (γραμμοπράξη 1).

ΒΗΜΑ 3ο: Κάνουμε το μη μηδενικό στοιχείο της στήλης μονάδα (γραμμοπράξη 2).

ΒΗΜΑ 4ο: Κάνουμε όλα τα στοιχεία της στήλης που είναι κάτω από τη μονάδα μηδενικά (γραμμοπράξη 3).

ΒΗΜΑ 5ο: Αγνοούμε την πρώτη γραμμή του πίνακα και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 έως 4 για τις επόμενες γραμμές του πίνακα. Αν όμως οι γραμμές που απέμειναν είναι μηδενικές, πηγαίνουμε στο 6ο βήμα.

ΒΗΜΑ 6ο: Από γραμμή σε γραμμή χρησιμοποιώντας το πρώτο από αριστερά 1 κάθε γραμμής και τη γραμμοπράξη 3 κάνουμε μηδέν όλα τα στοιχεία της στήλης στην οποία βρίσκεται η μονάδα αυτή.

— Εναλλαγή της θέσης δύο εξισώσεων

— Πολλαπλασιασμός των μελών μιας εξίσωσης με ένα μη μηδενικό αριθμό.

— Πρόσθεση των μελών μιας εξίσωσης (πολλαπλασιασμένων με έναν αριθμό) στα μέλη μιας άλλης.

Έτσι, όταν έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα προσπαθούμε, εφαρμόζοντας τις προηγούμενες διαδικασίες, να το μετασχηματίσουμε σε ένα άλλο ισοδύναμο σύστημα του οποίου η λύση να είναι προφανής.

Ας δούμε τώρα με ένα παράδειγμα πως εφαρμόζονται και πως συμβολίζονται οι τρεις αυτές διαδικασίες.

Έστω το γραμμικό σύστημα
$$\begin{cases} x-2y+\omega=0 \\ 2x-\ y+5\omega=-3 \\ 3x+\ y+2\omega=1 \end{cases} \quad (\Sigma_1)$$

— Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της 1ης εξίσωσης E_1 του (Σ_1) με -2 και τα προσθέτουμε στα αντίστοιχα μέλη της 2ης εξίσωσης E_2 του (Σ_1). Έτσι, απαλείφεται από την E_2 ο άγνωστος x.

$$E_2 \to E_2-2E_1 \quad \begin{cases} x-2y+\omega=0 \\ 3y+3\omega=-3 \\ 3x+\ y+2\omega=1 \end{cases} \quad (\Sigma_2)$$

— Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της E_1 του (Σ_2) με -3 και τα προσθέτουμε στα μέλη της E_3. Έτσι, απαλείφεται από την E_3 ο άγνωστος x.

$$E_3 \to E_3-3E_1 \quad \begin{cases} x-2y+\omega=0 \\ 3y+3\omega=-3 \\ 7y-\ \omega=1 \end{cases} \quad (\Sigma_3)$$

— Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της E_2 του (Σ_3) με $\frac{1}{3}$. Έτσι, ο συντελεστής του y γίνεται 1.

$$E_2 \to \frac{1}{3}E_2 \quad \begin{cases} x-2y+\omega=0 \\ y+\ \omega=-1 \\ 7y-\ \omega=1 \end{cases} \quad (\Sigma_4)$$

Συνεχίζουμε εφαρμόζοντας τις παραπάνω διαδικασίες που παριστάνουμε πλέον μόνο συμβολικά:

$$E_3 \to E_3-7E_2 \quad \begin{cases} x-2y+\omega=0 \\ y+\omega=-1 \\ -8\omega=8 \end{cases} \quad (\Sigma_5)$$

$$E_3 \to -\frac{1}{8}E_3 \quad \begin{cases} x-2y+\omega=0 \\ y+\omega=-1 \\ \omega=-1 \end{cases} \quad (\Sigma_6)$$

$$E_2 \to E_2 - E_3 \quad \begin{cases} x - 2y + \omega = 0 \\ \qquad\quad y = 0 \\ \qquad\quad \omega = -1 \end{cases}$$

$$E_1 \to E_1 - E_3 \quad \begin{cases} x - 2y \quad = 1 \\ \qquad\quad y = 0 \\ \qquad\quad \omega = -1 \end{cases}$$

$$E_1 \to E_1 + 2E_2 \quad \begin{cases} x \qquad = 1 \\ \qquad y = 0 \\ \qquad \omega = -1 \end{cases}$$

Όταν έχουμε δύο πίνακες A, B που ο ένας προκύπτει από τον άλλο με γραμμοπράξεις, τότε οι πίνακες αυτοί λέγονται **γραμμοϊσοδύναμοι** ή απλώς **ισοδύναμοι** και γράφουμε $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$. Είναι προφανές ότι, αν οι επαυξημένοι πίνακες δύο συστημάτων είναι ισοδύναμοι, τότε και τα συστήματα είναι ισοδύναμα, αφού καθεμιά γραμμοπράξη ξεχωριστά οδηγεί σε σύστημα ισοδύναμο με το αρχικό. Έτσι, η επίλυση του προηγούμενου συστήματος μπορεί να γίνει ως εξής:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 7 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_2 \to \frac{1}{3}\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 7\Gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_3 \to -\frac{1}{8}\Gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + 2\Gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Ο τελευταίος πίνακας αντιστοιχεί στο σύστημα $\begin{cases} x & = 1 \\ y & = 0 \\ \omega & = -1 \end{cases}$.

Επομένως, η λύση του συστήματος είναι η τριάδα $(1, 0, -1)$.